Année 2003

# CONCOURS D'ADMISSION

# A

# L'ECOLE DE L'AIR

## CONCOURS MP

## DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Coefficient : 14

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

***Nota : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.***

**T.S.V.P.**

On considère un nombre réel strictement positif $c$ et deux points $F_1$, $F_2$ dont la distance est égale à $2c$. On se propose dans ce problème d'étudier l'ensemble (L) des points $M$ du plan tels que $MF_1.MF_2 = c^2$.

Dans toute la suite, on supposera le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$ choisi de manière telle que les points $F_1$, $F_2$ aient pour coordonnées $(c, 0)$ et $(-c, 0)$ et on pose pour tout nombre réel $\theta$ :

$$\vec{u}\,(\theta) = \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j} \quad ; \quad \vec{v}\,(\theta) = -\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j}\,.$$

## PARTIE I : Étude et construction de l'ensemble (L)

1°) Équations cartésienne et polaire de (L)

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $M(x, y)$ appartienne à (L).

b) En déduire, si on pose $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ avec $r \geq 0$, que $M$ appartient à (L) si et seulement si $r = a\sqrt{\cos(2\theta)}$ où $\theta$ désigne un nombre réel variant dans un domaine à préciser et $a$ une constante qu'on exprimera en fonction de $c$.

Dans la suite de cette partie, on notera $M(\theta)$ le point de (L) défini par : $\overrightarrow{OM}\,(\theta) = a\sqrt{\cos(2\theta)}\;\vec{u}\,(\theta)$.

2°) Étude et construction de (L)

a) Calculer le vecteur-dérivé à (L) au point $M(\theta)$ et en déduire l'expression des deux vecteurs unitaires tangent et normal $\vec{T}\,(\theta)$ et $\vec{N}\,(\theta)$ au point $M(\theta)$ dans les bases $(\vec{u}\,(\theta), \vec{v}\,(\theta))$, puis $(\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

b) Étudier les symétries de (L) et expliquer pour quelles raisons il suffit d'étudier (L) pour $0 \leq \theta \leq \pi/4$. Donner des équations des tangentes à (L) aux points de paramètres $\theta = 0$, $\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/4$, puis représenter graphiquement la courbe (L).

c) Donner une mesure $\phi(\theta)$ de l'angle orienté $(\vec{i}\,,\,\vec{T}\,(\theta))$ et préciser la courbure à (L) au point $M(\theta)$. En quels points celle-ci est-elle maximale? minimale?

3°) Aire délimitée par (L) et longueur de (L)

a) Déterminer en fonction de $a$ l'aire du domaine intérieur à la courbe (L).

b) Montrer que la longueur $l$ de (L) est donnée par l'intégrale suivante :

$$l = 2a\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)}}\,.$$

4°) Étude de la courbe inverse de (L)

On appelle inversion de pôle $O$ et de rapport $a^2$ la transformation du plan privé de $O$ dans lui-même associant au point $M \neq O$ de coordonnées polaires $(r, \theta)$ le point $M'$ de coordonnées polaires $(a^2/r, \theta)$. On note (L') l'ensemble-image de (L) par cette inversion, autrement dit l'ensemble des transformés $M'$ des points $M$ de (L) par cette inversion.

a) Déterminer les transformés $F_1'$, $F_2'$ des points $F_1$, $F_2$ par cette inversion, puis reconnaître et écrire l'équation cartésienne de l'ensemble des points $M$ tels que $|MF_1' - MF_2'| = 2a$.

b) Déterminer des équations polaire et cartésienne de (L'), puis reconnaître (L').

## PARTIE II : Détermination de la longueur *l* de (L)

On considère dans cette partie les deux fonctions des variables réelles $p$, $q$ définies par :

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}dt \quad ; \quad \mathrm{B}(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} (\cos(\theta))^{2p-1}(\sin(\theta))^{2q-1}d\theta\,.$$

1°) La fonction Gamma d'Euler

a) Pour quelles valeurs de $p$ la fonction $t \longmapsto e^{-t}t^{p-1}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

b) Pour ces valeurs de $p$, exprimer $\Gamma(p+1)$ en fonction de $p$ et $\Gamma(p)$.

2°) La fonction Bêta d'Euler

a) Pour quelles valeurs de $p$, $q$ la fonction $\theta \longmapsto (\cos(\theta))^{2p-1}(\sin(\theta))^{2q-1}$ est-elle intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$?

b) Pour ces valeurs de $p$ et $q$, établir que $B(p, q) = B(q, p)$.

c) À l'aide d'un changement de variable convenable, établir que :

$$B(\frac{1}{4},\frac{3}{4}) = B(\frac{3}{4},\frac{1}{4}) = \int_0^{+\infty} \frac{4u^2 du}{u^4+1}.$$

À l'aide de l'égalité $\frac{4u^2}{u^4+1} = \frac{u\sqrt{2}}{u^2-u\sqrt{2}+1} - \frac{u\sqrt{2}}{u^2+u\sqrt{2}+1}$, calculer $B(\frac{1}{4},\frac{3}{4}) = B(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$.

d) À l'aide d'une intégration par parties convenable, établir que :

$$B(p, q) = \frac{p+q}{q} B(p, q+1) = \frac{p+q}{p} B(p+1, q)$$

(on pourra remarquer à cet effet l'égalité $(\cos(\theta))^{2p-1}(\sin(\theta))^{2q-1} = (\cos(\theta))^{2p+2q}(\tan(\theta))^{2q-1}\frac{1}{\cos^2(\theta)}$).

c) En déduire enfin la relation :

$$B(p, q) = \frac{(p+q)(p+q+1)}{pq} B(p+1, q+1).$$

3°) Relation entre les fonctions Bêta et Gamma

Pour tout nombre réel positif $R$, on considère les parties suivantes du quart de plan $x \geq 0$, $y \geq 0$ :

$P(R) = \{ (x, y) / 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R \}$ ; $C(R) = \{ (x, y) / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2 \}$.

Pour tout couple $(p, q)$ de nombres réels supérieurs ou égaux à 1/2, on considère la fonction continue $f$ des deux variables $x$, $y$ définie sur le quart de plan $x \geq 0$, $y \geq 0$ par :

$$f(x,y) = \exp(-x^2-y^2)x^{2p-1}y^{2q-1}.$$

a) Exprimer $\lim_{R\to+\infty} \iint_{P(R)} f(x,y)dxdy$ en fonction de $\Gamma(p)$ et $\Gamma(q)$.

b) Effectuer un passage en coordonnées polaires dans l'intégrale double $\iint_{C(R)} f(x,y)dxdy$.

En déduire $\lim_{R\to+\infty} \iint_{C(R)} f(x,y)dxdy$ en fonction de $\Gamma(p+q)$ et $B(p, q)$.

c) Représenter sur une même figure les parties $P(\frac{R}{\sqrt{2}})$, $C(R)$, $P(R)$, puis justifier l'inégalité suivante :

$$\iint_{P(\frac{R}{\sqrt{2}})} f(x,y)dxdy \leq \iint_{C(R)} f(x,y)dxdy \leq \iint_{P(R)} f(x,y)dxdy.$$

d) Quelle relation entre $\Gamma(p)$, $\Gamma(q)$, $\Gamma(p+q)$ et $B(p, q)$ en déduit-on pour $p \geq 1/2$ et $q \geq 1/2$?
En exprimant $B(p, q)$ en fonction de $B(p+1, q+1)$ lorsque $p > 0$ et $q > 0$, montrer que cette relation reste valable pour $p > 0$ et $q > 0$.

4°) Expression de la longueur $l$ de (L)

a) Calculer $B(1/2, 1/2)$ et retrouver la valeur de $\Gamma(1/2)$.
En déduire la longueur $l$ de (L) à l'aide de la fonction B, puis à l'aide de $\Gamma(1/4)$ et $\Gamma(3/4)$.

b) Déterminer $\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)$ et exprimer $\Gamma(3/4)$ en fonction de $\Gamma(1/4)$.
En déduire la longueur $l$ de la lemniscate de Bernoulli (L) en fonction de $\Gamma(1/4)$.

***